Τοπολογία

19/2/19

A

(1.13)

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, M ένας πραγματικός αριθμός

$\sup A \le M \Leftrightarrow \forall x \in A$ ισχύει $x \le M$

$\sup A \ge M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ \ x > M - \varepsilon$

$\inf A \ge M \Leftrightarrow \forall x \in A \ \ x \ge M$

$\inf A \le M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \ \ x < M + \varepsilon$

Ορισμός Έστω X μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρική (και το ζεύγος (X, ρ) λέγεται μετρικός χώρος) αν ισχύουν τα εξής:

α) $\rho(x,y) \ge 0 \ \forall x,y \in X$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \forall x,y \in X$

β) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \ \forall x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα)

γ) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (τριγωνική ανισότητα) $\forall x,y,z \in X$

Ο αριθμός $\rho(x,y)$ καλείται απόσταση του x από το y

Τα στοιχεία του μετρικού χώρου λέγονται σημεία

Συνήθως, για να συμβολίσουμε μια μετρική χρησιμοποιούμε τα σύμβολα ρ, σ, d

Παραδείγματα 1) Η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$

$\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x,y) = |x-y|$

Η ρ είναι μετρική

α) $\rho(x,y) = |x-y| \ge 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

β) $\rho(x,y) = |x-y| = |y-x| = \rho(y,x) \ \forall x,y \in \mathbb{R}$

γ) $\rho(x,z) = |x-z| = |(x-y) + (y-z)| \le |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$

2) Η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$ ορίζουμε για $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

Οι ιδιότητες α), β) της μετρικής προκύπτουν άμεσα. Για τη γ) (τριγωνική ανισότητα) θα τό δούμε αργότερα.

3) Η <u>διακριτή μετρική</u>
Αν $X \neq \emptyset$ ορίζουμε: $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

$\forall x, y \in X$. Η ρ λέγεται διακριτή μετρική και ο (X, ρ) λέγεται διακριτός μ. χ.

4) Αν (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A ένα μη κενό υποσύνολο του X τότε ο περιορισμός της μετρικής ρ στο $A \times A$ συμβολίζεται με ρ_A και ονομάζεται <u>σχετική μετρική</u> στο A (που ορίζεται από τη ρ) δηλ. $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$ $\forall x, y \in A$

Έτσι π.χ. αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ το A με τη σχετική μετρική ~~γίνεται με~~ που επάγει σε αυτό η συνήθης μετρική γίνεται μετρικός χώρος.

Ομοίως, αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^k$, το A με τη σχετική μετρική που επάγει σε αυτό η ευκλείδεια μετρική γίνεται μετρικός χώρος.

Μετρικές που ορίζονται σε δ.χ. από νόρμες

Υπενθύμιση: Ορισμός: Πραγματικός διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$ όπου X μη-κενό σύνολο, $+ : X \times X \to X$
$(x,y) \mapsto x+y$

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$
$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

i) $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in X$
ii) $x+y = y+x$ $\forall x,y \in X$
iii) $\exists\, 0 \in X$ $x+0 = 0+x = x$ $\forall x \in X$
iv) $\forall x \in X$ $\exists\, (-x) \in X$ $x+(-x) = (-x)+x = 0$
v) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ $\forall x,y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
vi) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$
vii) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$
viii) $1 \cdot x = x$ $\forall x \in X$

Τα στοιχεία του X καλούνται διανύσματα

Παραδείγματα
1) $\mathbb{R}^k$ με πράξεις κατά σημείο
2) Ο χώρος των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές
3) Ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq k$
4) Αν X μη κενό σύνολο $F(X) = \{ f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτ$\}$ με πράξεις κατά σημείο δηλ. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
5) Αν $X \neq \emptyset$ $\ell^\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} : f$ φραγμένη$\}$
6) Αν $a<b$ δύο πραγματικοί αριθμοί
$C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ συνεχής$\}$ με πράξεις κατά σημείο
[εδώ χρησιμοποιούμε ότι αν f, g συνεχείς τότε $f+g$, λf συνεχείς]

Ορισμός: Αν X πραγματικός δ.χ. Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα (ή στάθμη) αν $x \mapsto \|x\|$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

Αν η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στο X το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα

Μετρική που επάγει η νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα η απεικόνιση $\rho = \rho_{\|\cdot\|} : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\rho(x,y) = \|x-y\|$ είναι μετρική στο X

(i) $\rho(x,y) = \|x-y\| \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $\rho(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \cdot \|x-y\| =$ $= \|x-y\| = \rho(x,y)$

(iii) $\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$ $= \rho(x,y) + \rho(y,z)$

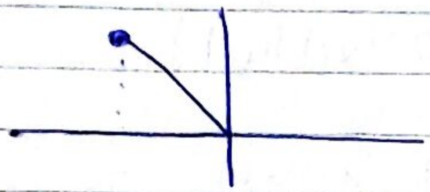
Από τα (i), (ii), (iii) η ρ είναι πραγματική μετρική

Παραδείγματα νορμών

1) Η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^k$. Για $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

[Οι ιδιότητες (i), (ii) της νόρμας προκύπτουν εύκολα η (iii) (τριγωνική ανισότητα) χρειάζεται απόδειξη.



2) <u>Η $\|\cdot\|_\infty$ στον $\mathbb{R}^k$</u>. Για $\vec{x} = (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$

$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i=1,\dots,k\}$

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα (ΑΣΚΗΣΗ)

3) <u>Η $\|\cdot\|_1$ στον $\mathbb{R}^k$</u>. Για $\vec{x} = (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$

$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$. Η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα

4) Αν $1 < p < +\infty$ η $\|\cdot\|_p$ ορίζεται στο $\mathbb{R}^k$ ως εξής:
Για $\vec{x} = (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$

(Η τριγωνική ανισότητα θέλει δουλειά)

Θα αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_2$. Θα χρειαστεί το εξής:

$\boxed{\text{Ανισότητα Causchy - Swarz:}}$ Αν $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k\in\mathbb{R}$ τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

<u>Αποδ:</u>

Θέτουμε $B = \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2$, $C = \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2$

Θέλουμε ν.δ.ο $B^2 \le A\cdot C$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$P(\lambda) = (\lambda|x_1|+|y_1|)^2 + (\lambda|x_2|+|y_2|)^2 + \dots + (\lambda|x_k|+|y_k|)^2 =$
$= \sum_{i=1}^{k} (\lambda|x_i|+|y_i|)^2$

Παρατηρούμε ότι $P(\lambda)\ge 0$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

$\longrightarrow$

Έχουμε $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda^2 |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\lambda |x_i||y_i|) =$

$= \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)\lambda^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i|\right)\lambda + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 =$

$= A\lambda^2 + 2B\lambda + C$

$\Rightarrow$ Αν $A=0$ τότε $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$ και άρα η ανισότητα ισχύει προφανώς και ως ισότητα.

$\Rightarrow$ Υποθέτω ότι $A>0$, τότε το $P(\lambda)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με το συντελεστή του λ^2 θετικό και ισχύει $P(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, άρα έχει διακρίνουσα ≤ 0 δηλ. $(2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$

Η $\|\cdot\|_2$ είναι πράγματι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^k$

Οπως είπαμε πριν οι ιδιότητες (i),(ii) είναι προφανείς
Αν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$

$\|\vec{x} + \vec{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (|x_i| + |y_i|)^2 =$

$= \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανισότητα} \\ \text{Cauchy-Schwartz}}}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2 + \|\vec{y}\|_2^2 =$

$= (\|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2)^2 \Rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2$

Επομένως, η $\|\cdot\|_2$ είναι πράγματι νόρμα